解题探索

正三角形的一个重要性质

吴青昀

（江苏省常州高级中学，213003）

正三角形有一个非常重要的用复数表示的性质：

为了叙述方便，本文就以点对应的字母表示该点所对应的复数.

首先[1]叙述一些关于复数的基本知识：两个三角形$\triangle Z_1Z_2Z_3$和$\triangle U_1U_2U_3$同向相似的充分必要条件用复数表达就是$\dfrac{Z_2-Z_1}{Z_3-Z_1}=\dfrac{U_2-U_1}{U_3-U_1}$，$\dfrac{Z_3-Z_2}{Z_1-Z_2}=\dfrac{V_3-V_2}{V_1-V_2}$，整理后可以写成：$\begin{vmatrix} Z_1 & U_1 & 1 \\ Z_2 & U_2 & 1 \\ Z_3 & U_3 & 1 \end{vmatrix}=0$.

若$\triangle Z_1Z_2Z_3$是正三角形，则它相似于以1的立方根为顶点的$\triangle EWW^2$，其中$E=1$，W对应$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. 即有：$\begin{vmatrix} Z_1 & 1 & 1 \\ Z_2 & \omega & 1 \\ Z_3 & \omega^2 & 1 \end{vmatrix}=0$.

利用$\omega^3=1$还可以将它改写成：

$Z_1+\omega Z_2+\omega^2Z_3=0$.

于是$\triangle Z_1Z_2Z_3$是正三角形的充要条件就是：

$Z_1+\omega Z_2+\omega^2Z_3=0$.　（＊）

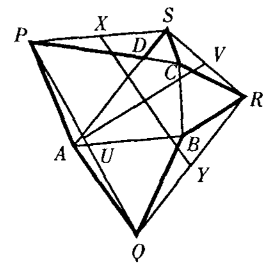
运用（＊）可以轻而易举地证明一些关于正三角形的著名定理，读者不妨借此感受一下（＊）的威力，这些定理的纯平面几何做法似乎还颇不容易，例如：

Echols 1：如果$\triangle Z_1Z_2Z_3$和$\triangle U_1U_2U_3$都是正三角形，则线段Z_1U_1，Z_2U_2，Z_3U_3的中点构成的三角形也是正三角形.

Echols 2：假如$\triangle Z_1Z_2Z_3$，$\triangle U_1U_2U_3$，$\triangle V_1V_2V_3$都是正三角形，则$\triangle Z_1Z_2Z_3$，$\triangle U_1U_2U_3$，$\triangle V_1V_2V_3$的重心构成正三角形.

下面看两个竞赛中的例子：

例1　（2008年女子数学奥林匹克）在凸四边形$ABCD$的外部分别作正三角形ABQ，正三角形BCR，正三角形CDS，正三角形DAP，记四边形$ABCD$的对角线之和为x，四边形$PQRS$的对边中心连线之和为y，求$\dfrac{y}{x}$的最大值.



分析：此题的难度就在于四边形$PQRS$的中点的连线很难用一个明确的量来刻画，P,Q,R,S四点飘浮在空中，让人难以下手. 事实上，标准答案取了许多个中点，添了许多条辅助线，还相当于把Echols定理证明了一遍，才费力地解决了这个题. 然而，这个题所具备的条件，恰恰是非常适合使用性质（＊）的. 请看下面的解答，可以算是相当简洁明了的，而且用为代数方法，这也几乎没有什么运算量.

解：如图，设PQ的中点为U，QR的中点为Y，RS的中点为V，SP的中点为X. 由题意，用（＊）将条件转化成复数语言，即知：

$Q=-A\omega-B\omega^2$

$R=-B\omega-C\omega^2$

$S=-C\omega-D\omega^2$

$P=-D\omega-A\omega^2$

于是：

$U=\dfrac{P+Q}{2}=-\dfrac{(A+D)\omega+(A+B)\omega^2}{2}$,

$V=\dfrac{S+R}{2}=-\dfrac{(B+C)\omega+(C+D)\omega^2}{2}$,

故$|U-V|=\dfrac{1}{2}|(A+D-B-C)\omega+(A+B-C-D)\omega^2|$.

同理$|X-Y|=\dfrac{1}{2}|(A+B-C-D)\omega+(B+C-A-D)\omega^2|$.

于是有
$$\begin{aligned} y &= |U-V|+|X-Y| \\ &= \frac{1}{2}|(A+D-B-C)\omega+(A+B-C-D)\omega^2|+\frac{1}{2}|(A+B-C-D)\omega+(B+C-A-D)\omega^2| \\ &\leqslant \frac{1}{2}|(1+\omega)(A-C)|+\frac{1}{2}|(1-\omega)(B-D)|+\frac{1}{2}|(1+\omega)(B-D)|+ \end{aligned}$$

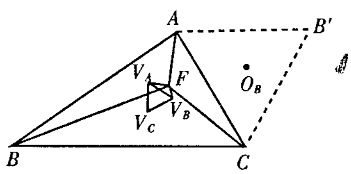
$$\frac{1}{2}|(1-\omega)(A-C)|$$
$$=\frac{1+\sqrt{3}}{2}[|(A-C)|+|(B-D)|]$$
$$=\frac{1+\sqrt{3}}{2}x.$$

即 $\frac{y}{x}\leqslant\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

等号当 $A-C\perp B-D$,即 $AC\perp BD$ 时成立,

故 $\frac{y}{x}$ 最大值为 $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

例 2 如图,$\triangle ABC$ 的最大内角小于 $120°$,F 是 $\triangle ABC$ 的 Fermat 点,V_A,V_B,V_C 分别是 $\triangle FBC$,$\triangle FAC$,$\triangle FAB$ 的九点圆圆心,求证:$\triangle V_AV_BV_C$ 是正三角形,且 F,V_A,V_B,V_C 四点共圆.



分析:题目的难度在于 V_A,V_B,V_C,F 是很玄乎的4个点.

似乎这道题除了问题中的 $\triangle V_AV_BV_C$ 是正三角形外就和正三角形没有关系了,那么怎么用(*)呢?其实仔细考虑 Fermat 点的性质可以知道,它和以 $\triangle ABC$ 的三边向外作出的正三角形有关,而且这三个正三角形的外心,恰恰是对应的 $\triangle FBC$,$\triangle FAC$,$\triangle FAB$ 的外心,考虑到三角形的九点圆圆心是三角形外心和垂心连线的中点,这就启示我们应该要作出分别以 $\triangle ABC$ 的三边为一条边的向外的正三角形.

证明:如图,以 AC 为一边向外作正三角形 ACB',并记 $\triangle ACB'$ 的外心为 O_B. 以 F 为原点,建立复平面,用各点的字母表示各点所对应的复数.

由条件和(*),$B'=-\frac{C+A\omega^2}{\omega}=-(A\omega+C\omega^2)$.

于是 $O_B=\frac{A+C-(A\omega+C\omega^2)}{3}$.

注意到 F,A,B',C 四点共圆,故 $\triangle FAC$ 的外心所对应的复数就是 $O_B=\frac{A+C-(A\omega+C\omega^2)}{3}$.

下面求 $\triangle FAC$ 的垂心 H_B 所对应的复数:

$$\overrightarrow{FH_B}=\overrightarrow{FO_B}+\overrightarrow{O_BH_B}$$
$$=\overrightarrow{FO_B}+\overrightarrow{O_BA}+O_BC+\overrightarrow{O_BF}$$
$$=\overrightarrow{O_BA}+\overrightarrow{O_BC}.$$

故有 $H_B+A+C-2O_B=\frac{A+C+2(A\omega+C\omega^2)}{3}$.

于是 $V_B=\frac{O_B+H_B}{2}=\frac{2A+2C+(A\omega+C\omega^2)}{6}$.

同理 $V_A=\frac{2B+2C+(C\omega+B\omega^2)}{6}$,

$V_C=\frac{2A+2B+(B\omega+A\omega^2)}{6}$,

$$V_B+\omega V_A+\omega^2V_C=\frac{1}{3}(1+\omega+\omega^2)(A+B+C)=0.$$

故 $\triangle V_AV_BV_C$ 是正三角形.

于是 $\angle V_AV_CV_B=60°$.

因此 F,V_A,V_B,V_C 四点共圆 $\Leftrightarrow\angle V_AFV_B=120°$.

设 $B=k\omega A$,$C=m\omega B$,

则 $B=k\omega A$,$C=mk\omega^2A$.

由图可知 $|B|>|C|>|A|$,

故 $k>0$,$0<m<1$,$mk>1$.

$$\text{而}\angle V_AFV_B=\arg\frac{V_B}{V_A}$$
$$=\arg\frac{2A+2C+(A\omega+C\omega^2)}{2B+2C+(C\omega+B\omega^2)}$$
$$=\arg\omega[\frac{2A+2C+(A\omega+C\omega^2)]}{\omega[2B+2C+(C\omega+B\omega^2)]}$$
$$=\arg\frac{(C\omega-A)(1-\omega)}{(B\omega-C)(1-\omega)}$$
$$=\arg\frac{\omega-A}{B\omega-C}=\frac{(mk-1)}{k(1-m)\omega^2}$$
$$=\arg\frac{(mk-1)\omega}{k(1-m)}=\arg\omega=120°.$$

因此 F,V_A,V_B,V_C 四点共圆.

总结:$\triangle Z_1Z_2Z_3$ 是正三角形 $\Leftrightarrow Z_1+\omega Z_2+\omega^2Z_3=0$.

这是解决和正三角形相关问题的一个不错的选择,遇到一些与正三角形有关的题时,它有着很大的威力. 当您在解题时感觉无从下手的时候,不妨试试这个方法,有时候它会起到令人意想不到的效果.

参考文献:

[1] 矢野健太郎. 几何的有名定理[M]. 陈永明,译. 1986年8月第1版.

[2] 葛军,涂荣豹. 初等数学研究教程[M]. 南京:江苏教育出版社,1999.

[3] 杜厚善. 通过一题多解培养学生求异思维[J]. 数学之友,2008,5.